III preOlimpiada Matemática Autonómica pOMA

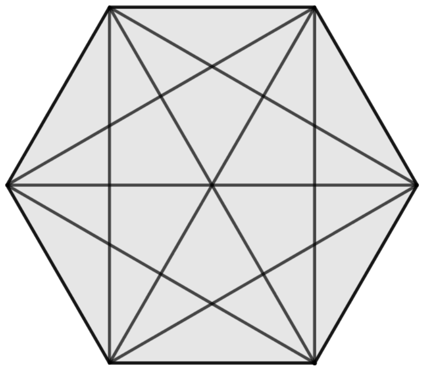
Enunciados y Soluciones

15 y 16 de noviembre de 2025

Índice

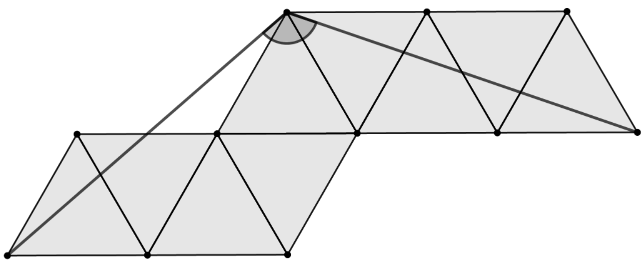
1. Enunciados nivel inicial

Problema 1. En el hexágono siguiente se han trazado todas las diagonales. Marc tiene 3 colores, con los que quiere pintar todos los lados y diagonales del hexágono. Marc está contento si no hay tres lados o diagonales del hexágono que forman un triángulo con los tres lados del mismo color. Razona que Marc puede pintar el hexágono de tal manera que queda contento.

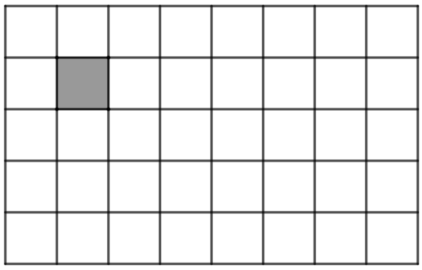


Problema 2. Marc tiene un reloj digital, que usa un número del 0 al 23 para marcar las horas, y un número del 0 al 59 para marcar los minutos. Marc está contento cuando el número de las horas tiene la misma suma de cifras que el número de los minutos. Determina razonadamente cuántos minutos estará Marc contento durante un día.

Problema 3. Determina razonadamente el ángulo marcado en la figura siguiente, dado que todos los triángulos sombreados son equiláteros.



Problema 4. Determina razonadamente el número de rectángulos distintos que se pueden dibujar sobre la cuadrícula siguiente, de forma que no contengan la casilla oscurecida.



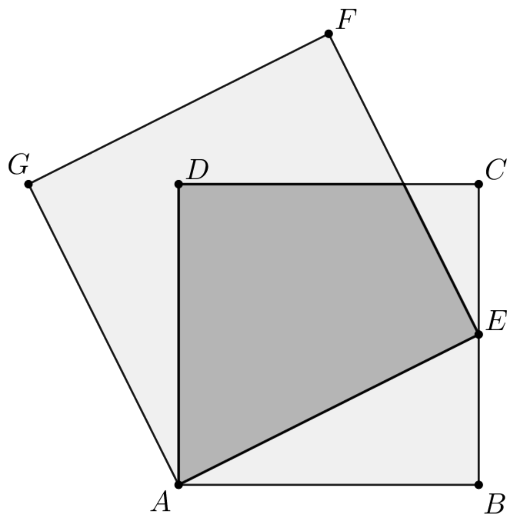
Problema 5. Responde razonadamente las siguientes preguntas.

(a) ¿Existe algún número entero positivo que se pueda escribir como producto de 5 números enteros positivos consecutivos y como suma de 5 números enteros positivos consecutivos?

(b) ¿Existe algún número entero positivo que se pueda escribir como producto de 6 números enteros positivos consecutivos y como suma de 6 números enteros positivos consecutivos?

Problema 6. Marc tiene una cuadrícula 9×9, a la que le falta la casilla central. Marc dispone de piezas 1×5, que puede girar. Determina razonadamente el número de formas distintas que tiene Marc de llenar la cuadrícula usando las piezas.

Problema 7. $ABCD$ es un cuadrado de lado 4, y E es el punto medio del segmento BC. Además, $AEFG$ también es un cuadrado. Determina razonadamente el área de la región sombreada de la figura.

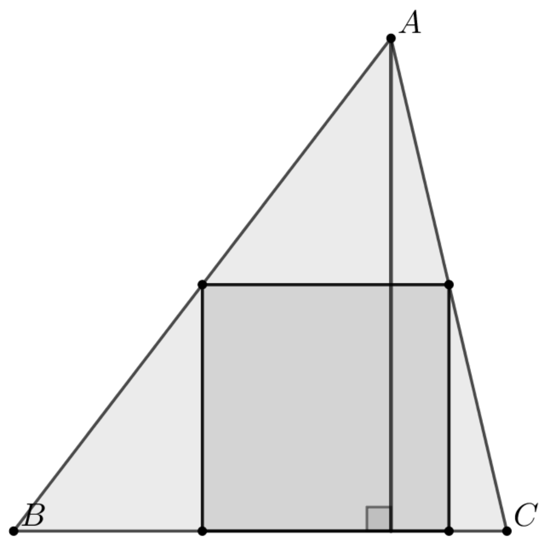


Problema 8. Decimos que el *reverso* de un número es el número que resulta de girar el órden de sus cifras. Por ejemplo, el reverso de 387 es 783.

(a) ¿Existe un número de tres cifras que, sumado a su reverso, dé 1009?

(b) ¿Existe un número de tres cifras que, sumado a su reverso, dé 1000?

Problema 9. En el siguiente dibujo, el triangulo ABC cumple que tanto el lado BC como la altura desde A tienen longitud 2. Se dibuja un cuadrado dentro de ABC, de forma que tiene dos vértices sobre BC, un vértice sobre AB, y otro vértice sobre AC. Determina razonadamente el área del cuadrado.



Problema 10. Hay 10 personas sentadas alrededor de una circunferencia. Cada una de ellas es o bien un caballero, y siempre dice la verdad, o bien es un ladrón, y siempre miente. A cada persona del círculo le haces la pregunta "¿La persona de tu derecha es un caballero?". Demuestra que un número par de personas han respuesto "Sí".

2. Enunciados nivel avanzado

Problema 1. Responde razonadamente las siguientes preguntas.

(a) ¿Existe algún número entero positivo que se pueda escribir como producto de 99 números enteros positivos consecutivos y como suma de 99 números enteros positivos consecutivos?

(b) ¿Existe algún número entero positivo que se pueda escribir como producto de 100 números enteros positivos consecutivos y como suma de 100 números enteros positivos consecutivos?

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo. D y E son puntos sobre la semirrecta AB pasado B y sobre la semirrecta AC pasado C, respectivamente, tales que $DB = BC = CE$. Sea X la intersección de BE y CD, y sea J el A-excentro de ABC. Demuestra que XJ es perpendicular a BC.

Problema 3. Sea $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ una sucesión de números reales con $a_0 = 3$, $a_1 = 7$, y

$$\frac{a_{n+1}^2 + a_n^2 + 5}{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 5} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}$$

para todo entero positivo n. Demuestra que a_n es un entero positivo para todo n.

Problema 4. Hay 2025 personas sentadas alrededor de una circunferencia. Cada una de ellas es o bien un caballero, y siempre dice la verdad, o bien es un ladrón, y siempre miente. A cada persona del círculo le haces la pregunta "¿La persona de tu derecha es un ladrón?". Demuestra que un número par de personas han respuesto "Sí".

Problema 5. Determina todos los pares x, y de enteros positivos cumpliendo que

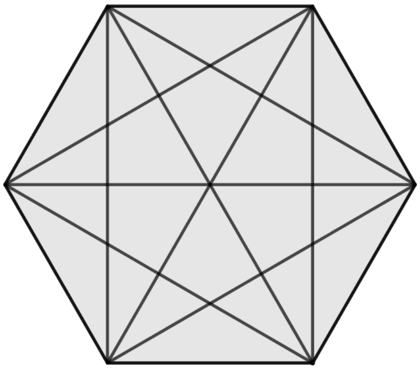
$$x^y + y^x = x! + y!$$

Problema 6. Marc se ha aficionado al conreo de manzanas. Para conrear, dispone de una parcela en forma de triángulo. Desgraciadamente, la ley prohibe conrear manzanas en parcelas que no sean triángulos acutángulos isósceles.
Demuestra que Marc siempre puede partir su parcela original en 100 o menos parcelas, todas ellas conformes a la ley, sin desperdiciar terreno de la parcela original.

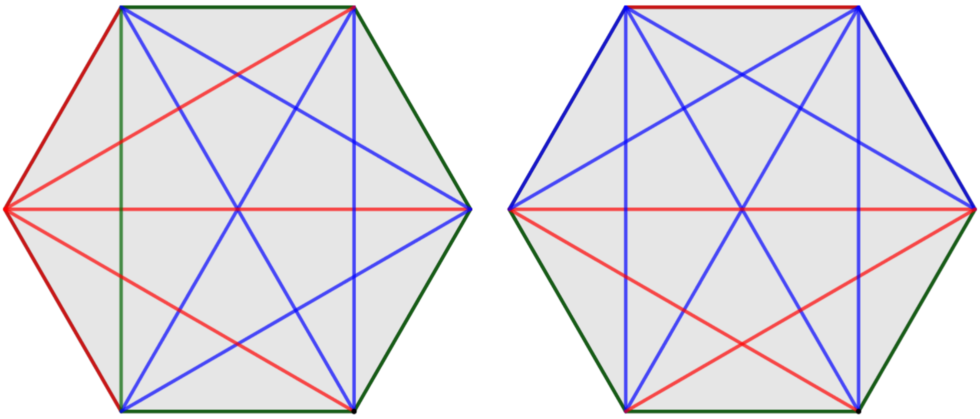
3. Soluciones nivel inicial

3.1. Problema 1 nivel inicial

Enunciado. En el hexágono siguiente se han trazado todas las diagonales. Marc tiene 3 colores, con los que quiere pintar todos los lados y diagonales del hexágono. Marc está contento si no hay tres lados o diagonales del hexágono que forman un triángulo con los tres lados del mismo color. Razona que Marc puede pintar el hexágono de tal manera que queda contento.



Solución. Hay muchas maneras de pintar como se pide. Damos dos formas.



3.2. Problema 2 nivel inicial

Enunciado. Marc tiene un reloj digital, que usa un número del 0 al 23 para marcar las horas, y un número del 0 al 59 para marcar los minutos. Marc está contento cuando el número de las horas tiene la misma suma de cifras que el número de los minutos. Determina razonadamente cuántos minutos estará Marc contento durante un día.

Solución. La respuesta es $\boxed{112}$. La observación clave es que el número de las horas tendrá siempre suma de cifras entre 0 y 10: por supuesto, la hora con máxima suma de cifras son las 19.

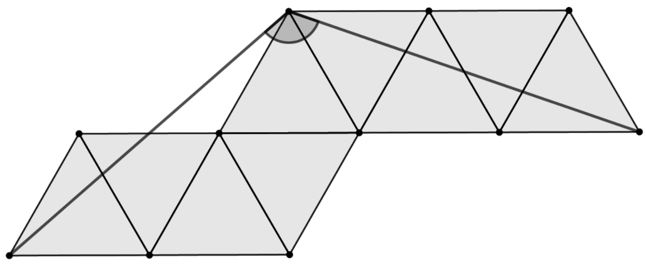
Ahora se puede contar para encontrar que, la cantidad de números entre 0 y 23 con suma de cifras $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ es, respectivamente, $1, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1$. Contando de forma similar, obtenemos que la cantidad de números entre 0 y 59 con suma de cifras $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ es, respectivamente, $1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 5$.

Por tanto, la respuesta es

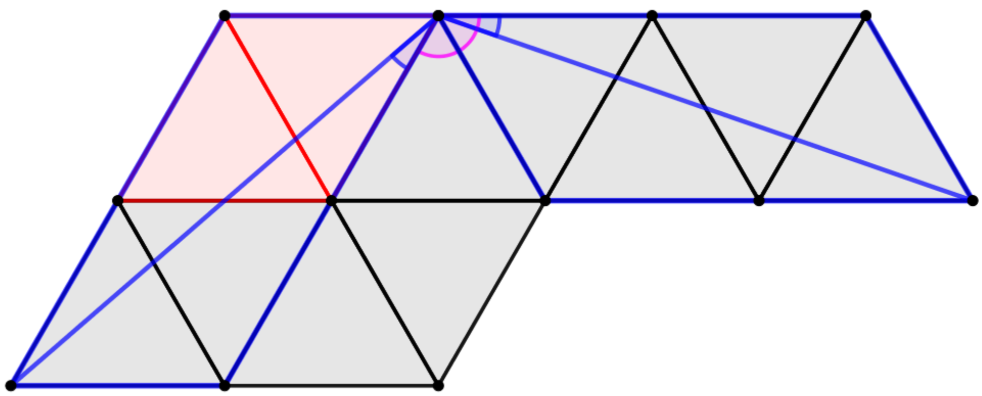
$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 = 112.$$

3.3. Problema 3 nivel inicial

Enunciado. Determina razonadamente el ángulo marcado en la figura siguiente, dado que todos los triángulos sombreados son equiláteros.

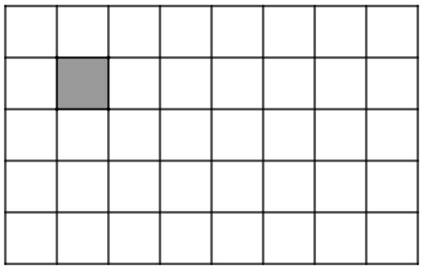


Solución. La respuesta es $\boxed{120^\circ}$. La idea clave es completar el dibujo con los dos triangulos equiláteros rojos. Tras añadirlos, se ve claro que los dos paralelogramos azules de la figura son congruentes, es decir, tienen la misma forma y tamaño. Se sigue que los dos ángulos azules mostrados en la figura miden lo mismo. Por tanto, el ángulo que nos piden mide lo mismo que el ángulo marcado en rosa. Por último, el ángulo rosa mide 120°, ya que está formado por dos ángulos de triángulo equilátero.



3.4. Problema 4 nivel inicial

Enunciado. Determina razonadamente el número de rectángulos distintos que se pueden dibujar sobre la cuadrícula siguiente, de forma que no contengan la casilla oscurecida.

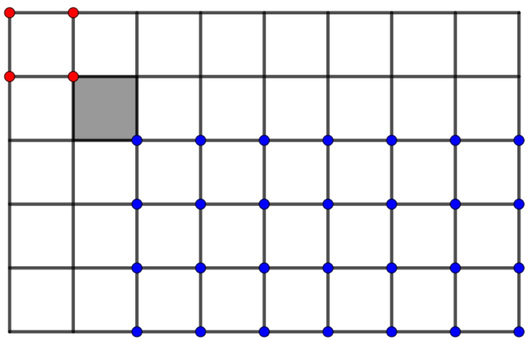


Solución. La respuesta es $\boxed{428}$. Llamemos T al número total de rectangulos que se pueden poner en la cuadrícula. De estos T, llamamos A al número de rectángulos que no ocupan la casilla oscurecida, y B al número de rectángulos que sí ocupan la casilla oscurecida. Observa que $T = A+B$. La idea clave es que, en vez de contar A directamente, calcularemos B y T y la respuesta será $A = T - B$.

Primero calculamos T. Un rectángulo queda determinado por las dos columnas donde están sus lados verticales y las dos filas donde están sus lados horizontales. Hay $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$ formas de elegir las dos columnas, y $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ formas de elegir las dos filas. Por tanto, resulta que $T = 36 \cdot 15 = 540$.

Ahora calculamos B. Ahora el rectángulo debe contener la casilla oscurecida. Nota que un rectángulo queda únicamente determinado por su vértice superior izquierdo y su vértice inferior derecho. Observamos que, para que el rectángulo contenga la casilla oscurecida, el vértice superior izquierdo ha de ser uno de los 4 vértices rojos en el dibujo, y el vértice inferior derecho ha de ser uno de los $4 \cdot 7 = 28$ vértices azules. Por tanto, hay $B = 4 \cdot 28 = 112$ formas de elegir un rectangulo que contenga la casilla oscurecida.

Por tanto, la respuesta final es $A = T - B = 540 - 112 = 428$.



3.5. Problema 5 nivel inicial

Enunciado. Responde razonadamente las siguientes preguntas.

(a) ¿Existe algún número entero positivo que se pueda escribir como producto de 5 números enteros positivos consecutivos y como suma de 5 números enteros positivos consecutivos?

(b) ¿Existe algún número entero positivo que se pueda escribir como producto de 6 números enteros positivos consecutivos y como suma de 6 números enteros positivos consecutivos?

Solución. (a). La respuesta es sí. Por ejemplo, una solución válida es

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = 22 + 23 + 24 + 25 + 26.$$

(b). La repuesta es no. Supongamos que existe algún número n que se puede escribir como suma de 6 números consecutivos y como producto de 6 números consecutivos. Entonces, hay enteros positivos a y b tales que

$$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5) = n = b(b+1)(b+2)(b+3)(b+4)(b+5).$$

Observa que, como $n = b(b+1)(b+2)(b+3)(b+4)(b+5)$, n ha de ser múltiplo de 2. En efecto, o bién b o bién $b+1$ es par, y por por tanto n es múltiplo de 2. No obstante, también tenemos que

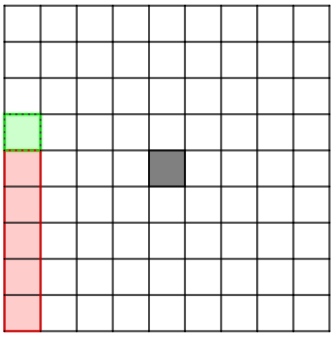
$$n = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) = 6a + 15.$$

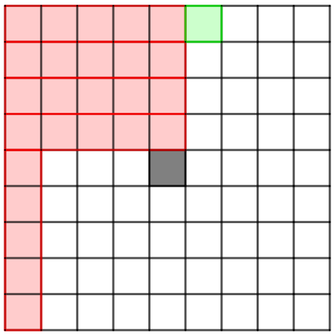
El número $6a + 15$ es un par $6a$ más un impar 15, por lo que siempre será impar. Pero es imposible que n sea par e impar a la vez. Por tanto, hemos llegado a una contradicción. Sigue que es imposible que exista un número que se pueda escribir como suma de 6 números enteros positivos consecutivos y como el producto de 6 números enteros positivos consecutivos.

3.6. Problema 6 nivel inicial

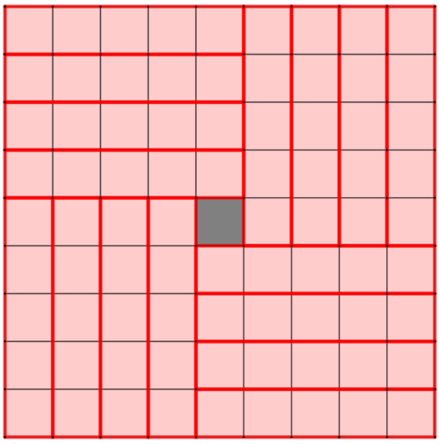
Enunciado. Marc tiene una cuadrícula 9×9, a la que le falta la casilla central. Marc dispone de piezas 1×5, que puede girar. Determina razonadamente el número de formas distintas que tiene Marc de llenar la cuadrícula usando las piezas.

Solución. La respuesta es $\boxed{2}$. Nos fijamos en la esquina inferior izquierda del tablero. Esta, o bien se tapa con una pieza 1×5 horizontal, o con una 5×1 vertical. Veremos que esta elección determina únicamente la colocación del resto de piezas.





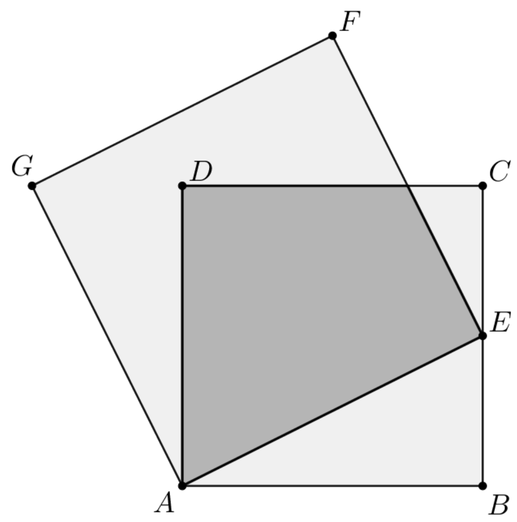
Una vez colocada la pieza roja del tablero de la izquierda, sigue que la casilla verde debe ser cubierta por una pieza roja horizontal. Ahora, todas las casillas encima de la pieza roja horizonatal deben ser cubiertas por piezas rojas horizontales tal como muestra el segundo dibujo. Ahora nos fijamos en la casilla verde del segundo dibujo, que debe ser tapada por una pieza vertical. Se sigue haciendo, y se ve claro que la única forma de completar la colocación es:



En el caso en que se cubre la esquina inferior izquierda con una pieza horizontal, se llega a que la única posibilidad es el espiral anterior, pero en el sentido opuesto. Por tanto, hay dos posibilidades.

3.7. Problema 7 nivel inicial

Enunciado. $ABCD$ es un cuadrado de lado 4, y E es el punto medio del segmento BC. Además, $AEFG$ también es un cuadrado. Determina razonadamente el área de la región sombreada de la figura.



Solución. La respuesta es $\boxed{11}$. Empezamos observando que $AB = 4$, $BE = 2$, $EC = 2$. Llamemos K al punto donde intersecan los segmentos CD y EF. La observación clave es que los triangulos ECK y ABE son similares. Por supuesto, esto es cierto ya que ambos son rectángulos y se tiene que

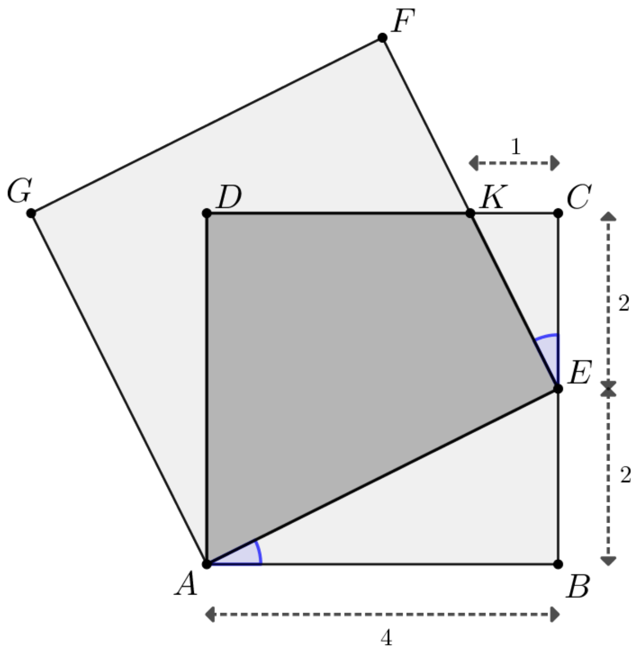
$$\angle BAE = 90^\circ - \angle BEA = 90^\circ - (180^\circ - \angle AEC) = \angle KEC.$$

Por tanto, sique que $EC/CK = AB/BE$, y por tanto

$$CK = \frac{BE \cdot EC}{AB} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1.$$

Por tanto, podemos calcular al área de la región sombreada como

$$\text{Área sombreada} = \text{Área } ABCD - \text{Área } ABE - \text{Área } ECK = 16 - 4 - 1 = 11.$$



3.8. Problema 8 nivel inicial

Enunciado. Decimos que el *reverso* de un número es el número que resulta de girar el órden de sus cifras. Por ejemplo, el reverso de 387 es 783.

(a) ¿Existe un número de tres cifras que, sumado a su reverso, dé 1009?

(b) ¿Existe un número de tres cifras que, sumado a su reverso, dé 1000?

Solución. (a). La respuesta es sí. Por ejemplo, funciona $950 + 59 = 1009$. De hecho, cualquier número de tres cifras con cifra de las decenas igual a 5, y con la suma de la cifra de las centenas y la de las unidades siendo 9 funciona.

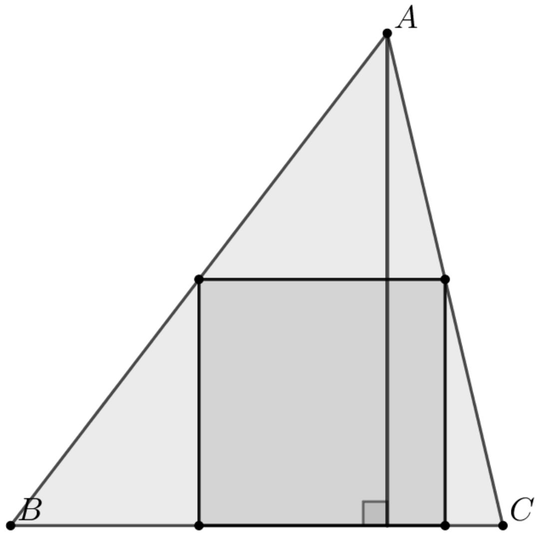
(b). La respuesta es no. Escribimos nuestro número como ABC, donde A, B, C son cifras, y por tanto entre 0 y 9. Entonces, se debe cumplir que

$$1000 = ABC + CBA = (100A + 10B + C) + (100C + 10B + A) = 101A + 20B + 101C.$$

Observa que 1000 y $20B$ son múltiplos de 20, por tanto, para que se cumpla la igualdad, $101(A+C)$ ha de ser múltiplo de 20. No obstante, esto es imposible, ya que 101 no tiene factores en común con 20, y $A+C$ está entre 0 y 18. Por tanto, no existen A, B, C entre 0 y 9 tales que $1000 = 101A + 20B + 101C$, y la respuesta es no.

3.9. Problema 9 nivel inicial.

Enunciado. En el siguiente dibujo, el triangulo ABC cumple que tanto el lado BC como la altura desde A tienen longitud 2. Se dibuja un cuadrado dentro de ABC, de forma que tiene dos vértices sobre BC, un vértice sobre AB, y otro vértice sobre AC. Determina razonadamente el área del cuadrado.



Solución. La respuesta es $\boxed{1}$. Llamemos x a la longitud del lado del quadrado. Aplicando el teorema de Thales (es decir, como los triángulos BAK y BDE son similares), tenemos que

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BA}{AK} \implies x = \frac{BD \cdot AK}{BA} = 2\frac{BD}{AB}.$$

Aplicando Thales otra vez, ahora usando que ADF y ABC son similares, tenemos que

$$\frac{AD}{DF} = \frac{AB}{BC} \implies x = \frac{AD \cdot BC}{AB} = 2\frac{AD}{AB}.$$

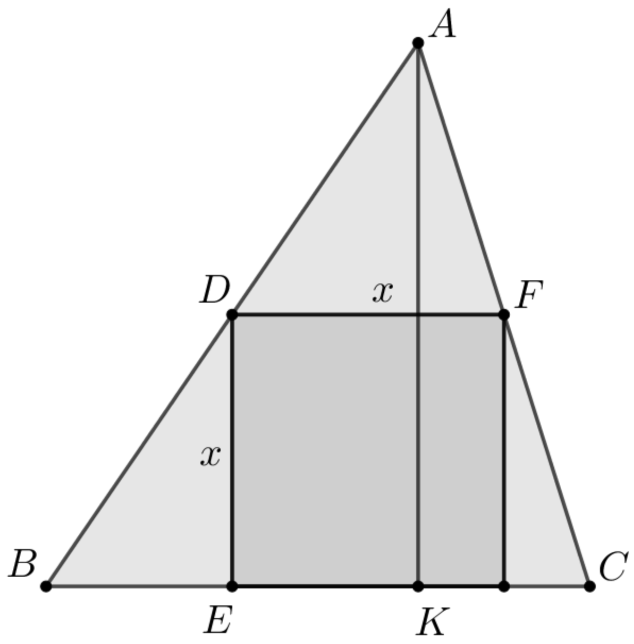
Por tanto, tenemos que

$$x = 2\frac{BD}{AB} = 2\frac{AD}{AB}.$$

Sumando las dos igualdades, resulta que

$$2x = 2\frac{BD}{AB} + 2\frac{AD}{AB} = 2\frac{BD + DA}{AB} = 2.$$

Por tanto $x = 1$, y el cuadrado tiene área $x^2 = 1$.



4. Soluciones nivel avanzado

4.1. Problema 1 nivel avanzado

Enunciado. Responde razonadamente las siguientes preguntas.

(a) ¿Existe algún número entero positivo que se pueda escribir como producto de 99 números enteros positivos consecutivos y como suma de 99 números enteros positivos consecutivos?

(b) ¿Existe algún número entero positivo que se pueda escribir como producto de 100 números enteros positivos consecutivos y como suma de 100 números enteros positivos consecutivos?

Solución. (a). La respuesta es sí. Por ejemplo, una solución válida es 99! que se puede escribir de las formas

$$99! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 = 99!$$
$$99! = (98! - 49) + \dots + (98! - 1) + 98! + (98! + 1) + \dots + (98! + 49)$$

(b). La repuesta es no. Supongamos que existe algún número n que se puede escribir como suma de 100 números consecutivos y como producto de 100 números consecutivos. Entonces, hay enteros positivos a y b tales que

$$a + (a+1) + \dots + (a+99) = n = b(b+1)\dots(b+99).$$

Observa que $b(b+1)\dots(b+99)$ es múltiplo de 4. No obstante, observa que

$$a + (a+1) + \cdots + (a+99) = 100a + 1 + 2 + \cdots + 99 = 100a + \frac{99 \cdot 100}{2}.$$

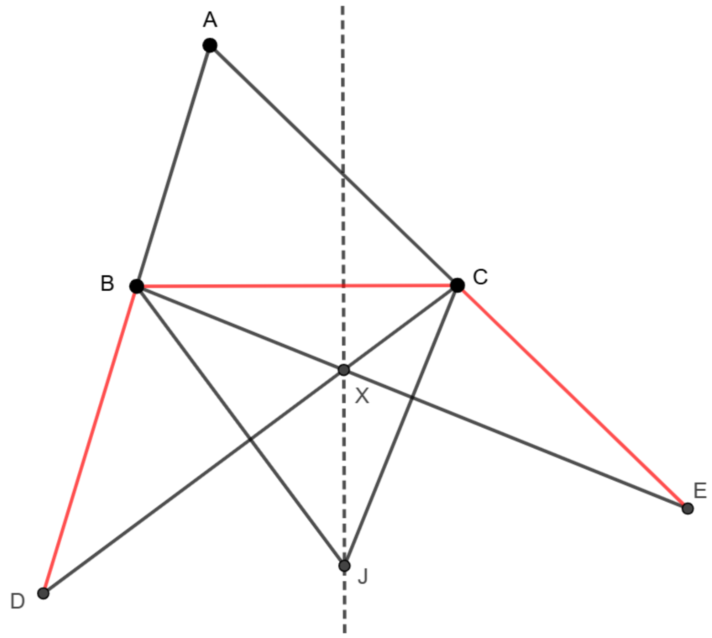
El número $100a$ es múltiplo de 4, pero $\frac{99 \cdot 100}{2} = 99 \cdot 2 \cdot 25$ no lo es. Por tanto, n no puede ser múltiplo de 4. Contradicción.

4.2. Problema 2 nivel avanzado

Enunciado. Sea ABC un triángulo acutángulo. D y E son puntos sobre la semirrecta AB pasado B y sobre la semirrecta AC pasado C, respectivamente, tales que $DB = BC = CE$. Sea X la intersección de BE y CD, y sea J el A-excentro de ABC. Demuestra que XJ es perpendicular a BC.

Solución. Demostraremos que X es el ortocentro del triángulo JBC, lo que claramente acabará el probelma. Para eso veremos que $BX \perp CJ$ y $CX \perp BJ$. De hecho solo veremos la primera, y la segunda seguirá similarmente.

Para esto notemos que, por definición de E, tenemos que el triángulo CBE es isósceles en C. Además, como J es el A-excentro, tenemos que CJ es la bisectriz del ángulo $\angle BCE$. Por lo tanto, al ser la bisectriz del ángulo distinto de un triángulo isósceles, necesariamente tenemos que $CJ \perp BX$, lo que acaba el problema.



4.3. Problema 3 nivel avanzado

Enunciado. Sea $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ una sucesión de números reales con $a_0 = 3$, $a_1 = 7$, y

$$\frac{a_{n+1}^2 + a_n^2 + 5}{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 5} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}$$

para todo entero positivo n. Demuestra que a_n es un entero positivo para todo n.

Solución. Primero veamos que, en caso de que todo término de la sucesión sea entero, entonces debe ser entero postivo. Asume que no, y que existe un ínidice n tal que a_{n+1} es el primer término en ser negativo. Entonces, tenemos que

$$a_{n+1} = a_{n-1} \cdot \frac{a_{n+1}^2 + a_n^2 + 5}{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 5},$$

donde a_{n-1} es positivo, y la fracción también, ya que tanto numerador como denominador lo son.

Queda por ver entonces que los términos son enteros. Para eso, veremos que o bien se cumple que $a_{n+1} = a_{n-1}$ o que $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$. Claramente esto acaba el problema, y de hecho no es difícil de demostrar por inducción, pero no está claro como sacarse este claim de la manga (si se hacen unos cuantos casos a mano y se tiene buena vista se puede conjeturar, pero no es tan obvio). Así pues, escribiremos una solución de tal manera que se motive esto:

La condición, después de pasar multiplicando, y multiplicar por a_n en el denominador, se convierte en

$$\frac{a_{n+1}^2 + a_n^2 + 5}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 5}{a_{n-1} a_n}.$$

Es decir, que para todo n tenemos que el valor $\frac{a_{n+1}^2 + a_n^2 + 5}{a_n a_{n+1}}$ es constante. Poniendo $n = 1$, obtenemos $\frac{7^2+3^2+5}{3 \cdot 7} = 3$. Por lo tanto, la condición del problema es equivalente a

$$\frac{a_{n+1}^2 + a_n^2 + 5}{a_n a_{n+1}} = 3 \iff a_{n+1}^2 - 3a_n a_{n+1} + a_n^2 + 5 = 0.$$

Es decir, que a_{n+1} es una raíz de la cuadrática $x^2 - 3a_n x + a_n^2 + 5$. Pero ahora, notemos que cambiando n por $n-1$ tenemos que $a_n^2 - 3a_{n-1}a_n + a_{n-1}^2 + 5 = 0$, que es la misma expresión cambiando a_{n+1} por a_{n-1}, y por lo tanto concluimos que a_{n-1} es raíz de la misma cuadrática. Por lo tanto, o bien $a_{n+1} = a_{n-1}$ son la misma raíz, o bien son las dos raíces distintas y por lo tanto suman al negativo del término lineal de la cuadrática, es decir, que $a_{n+1} + a_{n-1} = 3a_n$. Esto acaba la prueba.

4.4. Problema 4 nivel avanzado y 10 nivel inicial

Enunciado. Hay 2025 personas sentadas alrededor de una circunferencia. Cada una de ellas es o bien un caballero, y siempre dice la verdad, o bien es un ladrón, y siempre miente. A cada persona del círculo le haces la pregunta "¿La persona de tu derecha es un ladrón?". Demuestra que un número par de personas han respuesto "Sí".

Nota: En el nivel inicial se pidió el mismo problema pero con 10 personas en el círculo. La solución es exactamente la misma.

Solución. Veremos que la cantidad de veces que nos dices que "Sí" es par independientemente de la cantidad de gente que haya en el círculo (es decir, no solo para 10 o 2025, sinó para cualquier cantidad de personas).

Escribamos C para denotar a un caballero, y L para un ladrón. Ahora, cuando hacemos una pregunta a una persona, hay cuatro posibilidades: la persona a la que le hacemos la pregunta puede ser o ladrón o caballero, y la persona a su derecha puede también ser o ladrón o caballero. Escribimos las 4 posibilidades como LL, LC, CC, CL, donde la primera letra denota la persona a la que le hacemos la pregunta, y la segunda la de su derecha. Notemos que en los casos LL y CC nos contestará "No", y en los casos LC y CL nos contestará "Sí". Es decir, que la respuesta será "Sí" solo si hacemos un cambio de ladrón a caballero, o al revés.

Por lo tanto, el problema se resume en ver que si colocamos caballeros y ladrones en círculo, la cantidad de veces que hay un cambio es par. Pero esto es fácil, pues si empezamos a contar desde una persona cualquiera, pongamos por ejemplo que es caballero, después de un cambio estaremos con un ladrón, después de dos cambios con un caballero, y así seguidamente. Por lo tanto, como al dar la vuelta tendremos que acabar con el caballero del principio, tendrá que haber habido una cantidad par de cambios, lo que acaba el problema.

4.5. Problema 5 nivel avanzado

Enunciado. Determina todos los pares x, y de enteros positivos cumpliendo que

$$x^y + y^x = x! + y!$$

Propuesto por Félix Moreno.

Solución. Fácilmente vemos que $(1,1)$, $(2,1)$ y $(1,2)$ son soluciones, y que no hay ninguna otra con $x = y$ o con $x = 1$. Demostraremos que son las únicas soluciones. Supongamos que hay otra solución con $1 < x < y$ (WLOG). Sea p un primo que divide a x.

$$p|x! + y! \implies p|x^y + y^x \implies p|y^x \implies p|y \implies p^x|x^y + y^x \implies p^x|x! + y!$$

Además, $p|y$ y $x < y$ implica que $y!/x!$ es divisible por p y, en particular, $\nu_p(x!(1+\frac{y!}{x!})) = \nu_p(x!)$.

Por tanto, tenemos que

$$x \leq \nu_p(x! + y!) = \nu_p(x!(1 + \frac{y!}{x!})) = \nu_p(x!) = \lfloor \frac{x}{p} \rfloor + \lfloor \frac{x}{p^2} \rfloor + \ldots < x \cdot \frac{1}{p-1} \leq x,$$

y contradicción.

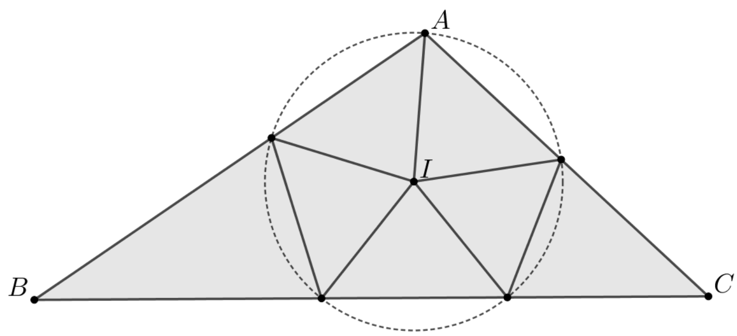
4.6. Problema 6 nivel avanzado

Enunciado. Marc se ha aficionado al conreo de manzanas. Para conrear, dispone de una parcela en forma de triángulo. Desgraciadamente, la ley prohibe conrear manzanas en parcelas que no sean triángulos acutángulos isósceles.
Demuestra que Marc siempre puede partir su parcela original en 100 o menos parcelas, todas ellas conformes a la ley, sin desperdiciar terreno de la parcela original.

Solución. El problema pide demostrar que todo triángulo se puede particionar en 100 o menos triángulos acutángulos isósceles. De hecho, daremos una solución que parte el triángulo inicial en 9 o menos triángulos acutángulos isósceles. El paso clave es la siguiente observación.

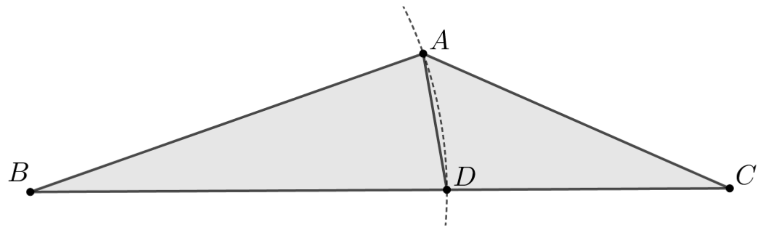
Claim. Si ABC es un triángulo con $\angle A > 90°$, y $\angle B - \angle A, \angle C - \angle A < 90°$, entonces podemos particionar $\triangle ABC$ en 7 triángulos acutángulos isósceles.

Proof. Usamos la siguiente construcción. Sea I el incentro de ABC. Trazamos un círculo de centro I pasando por A. Este circulo interseca en un punto distinto de A a cada uno de los lados AB y AC, y como $d(I, BC) = d(I, AB) < IA$, el círculo interseca BC en dos puntos.



Por construcción, los 7 triángulos mostrados en la figura son isósceles. Es directo comprovar que, gracias a las restricciones sobre los ángulos de $\triangle ABC$, todos los triángulos usados son actuángulos. ■

Supongamos ahora que $\triangle ABC$ es obtusángulo en A, y con $\angle B < \angle C$. Vemos que podemos partirlo en 8 triángulos acutángulos isósceles. Sea D el punto sobre el lado BC tal que $BD = BA$. Nota que $\triangle ABD$ es isósceles en B. Basta con ver que el triángulo ADC satisface las condiciones del claim.



Por construcción ADC es isósceles en D. Comprovamos que

$$\angle ADC - \angle ACD = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B - \angle C < 90^\circ,$$

ya que $\angle B < \angle C$. Por último,

$$\angle ADC - \angle DAC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B - \angle A - \frac{1}{2}\angle B + 90^\circ = 180^\circ - \angle A < 90^\circ,$$

ya que $\angle A > 90^\circ$. Por tanto, aplicando el claim, podemos partir cualquier triángulo obtusángulo en 8 o menos triángulos acutángulos isósceles.

Supongamos finalmente que $\triangle ABC$ es acutángulo o rectángulo. Asume sin pérdida de generalidad que $\angle A \geq \angle B, \angle C$. Por supuesto, si los dos ángulos más grandes del triángulo fueran iguales, entonces seguiría que el triángulo es acutángulo isósceles y habríamos terminado. Por tanto asume $\angle A > \angle B, \angle C$. Sea D el punto sobre el lado BC tal que $BD = BA$. Ahora, $\triangle DBA$ es isósceles acutángulo en B, y $\triangle ADC$ es obtusángulo. Por tanto, $\triangle DBA$ no dá problema, y $\triangle ADC$ se puede partir en 8 o menos triángulos acutángulos isósceles.

Comentarios. Hay varias soluciones alternativas, aunque no conocemos ninguna otra usando solo 9 triángulos.